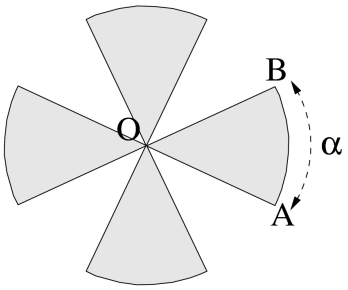
Examen de mécanique du solide

Jeudi 12 novembre 2009 (1,5 heure)

Les exercices sont indépendants. Le barème est approximatif.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1. Moment d'inertie *(~ 3 points)*

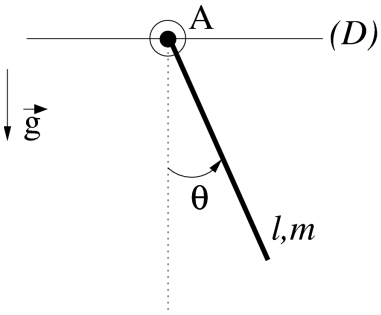


Une hélice est constituée de quatre palles identiques soudées entre elles en O (voir figure). Chaque palle est homogènes, de masse *m*, d'épaisseur négligeable, et est caractérisée par un rayon $R = OA = OB$ et un angle α. (A,B) est un arc de cercle de centre O et rayon *R*.

Calculer le moment d'inertie *J* de l'hélice par rapport à son axe de symétrie (Δ).

(Δ) *est l'axe, perpendiculaire au plan de l'hélice, passant par O.*

Exercice 2. Oscillation d'une barre *(~ 7 points)*



Une barre, homogène de masse *m*, de longueur *l* est attachée en A à un axe (*D*) horizontal fixe (voir figure). Grâce à des roulements à billes (de masse négligeable) la liaison entre la barre et l'axe (*D*) a les caractéristiques suivantes :

- La barre peut tourner librement (sans frottement) autour de A, dans le plan de la figure. Soit θ l'angle que fait la barre avec la verticale à l'instant *t*.
- Le point d'attache A <u>peut se déplacer sans frottement</u> le long de l'axe (*D*) ; ainsi la force $\vec{R}$ de l'axe (*D*) sur la barre est toujours verticale.

La barre est lâchée, sans vitesse initiale, d'un angle θ_0.

a) Montrer que le centre de gravité de la barre se déplace sur un axe vertical.

b) En appliquant le principe fondamental de la dynamique (loi de Newton et théorème du moment cinétique), trouver l'équation différentielle du mouvement de la barre (équation différentielle dont θ est solution).

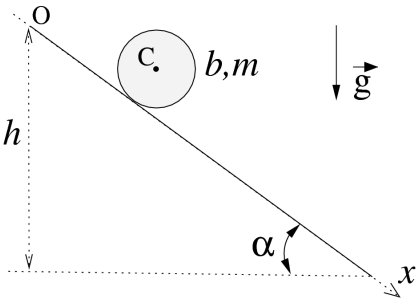
c) Retrouver cette équation par une approche utilisant l'énergie (théorème de l'énergie cinétique ou théorème de la puissance cinétique).

Donnée : Le moment d'inertie J d'une barre homogène, de masse m, de longueur l, par rapport à son axe de symétrie (axe perpendiculaire à la barre passant par son centre) est $J = ml^2/12$.

Exercice 3. Mouvement sur un plan incliné *(~ 10 points)*

Soit un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale, de hauteur h. Les coefficients de frottement statique et dynamique entre une roue et ce plan sont supposés égaux : $f = f_s = f_d$.

3.1. Une roue, homogène, de masse m, d'épaisseur négligeable et de rayon b ($b \ll h$), est lâchée sans vitesse initiale en haut du plan incliné. Soit x la position du centre C de la roue (voir figure). On suppose que la roue reste dans le plan vertical $((Ox), \vec{g})$.



3.1.a) En supposant que la roue <u>roule sans glisser</u> sur le plan incliné :

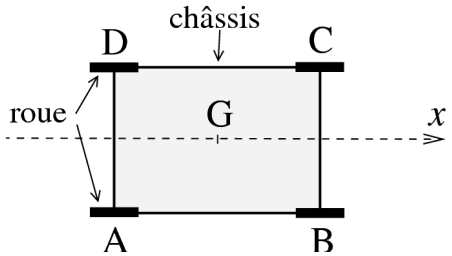
- Déterminer l'accélération du centre C de la roue en fonction du temps.
- Combien de temps met la roue pour descendre le plan incliné ?
- A quelle condition sur α , le contact roue/sol est-il vraiment sans glissement ?

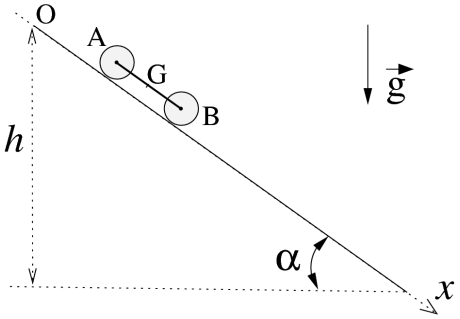
3.1.b) En supposant que la roue <u>roule en glissant</u> sur le plan incliné :

- Déterminer l'accélération du centre C de la roue en fonction du temps.
- Combien de temps met la roue pour descendre le plan incliné ?
- A quelle condition sur α , le contact roue/sol est-il vraiment avec glissement ?

3.2. Une voiture est modélisée schématiquement par quatre roues identiques (homogènes, de masse m, de rayon b et d'épaisseur négligeable) et par un châssis rectangulaire (A,B,C,D) rigide de masse M. Le centre de gravité G du châssis est au centre du rectangle (A,B,C,D). Les roues sont fixées au châssis en A, B, C et D. La voiture est en « roues libres », ainsi les roues peuvent tourner librement (liaison parfaite). La voiture est lâchée, sans vitesse initiale, en haut du plan incliné. On suppose que les roues tournent <u>sans glisser</u> sur le sol et que la droite (AB) reste parallèle au plan $((Ox), \vec{g})$. Les dimensions caractéristiques de la voiture sont petites devant h.

Voiture vue de dessus





3.2.a) Déterminer l'énergie cinétique de la voiture dans le référentiel du plan incliné.

3.2.b) En déduire la vitesse de la voiture lorsqu'elle arrive en bas du plan incliné ?

Donnée : Le moment d'inertie J d'une roue homogène, de masse m, de rayon b, par rapport à son axe de symétrie (axe perpendiculaire à la roue passant par son centre) est $J = mb^2/2$.